Семинары №1,2.

Модели гидродинамических объектов.

$$\left[\begin{matrix}\text{Входной}\\ \text{поток}\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}\text{Выходной}\\ \text{поток}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\text{Скорость}\\ \text{накопления}\end{matrix}\right] = \frac{d}{dt}\left[\text{Количество}\right]$$

Порядок составления математической модели (ММ):

1 стадия: Разбиение объекта на зоны с одинаковым гидродинамическим режимом.

Типовые режимы:

- Идеальное смешение (ИС)
- Идеальное вытеснение (ИВ)
- Диффузионная модель
- Ячеичная модель

Также выделяются зоны “смеситель” и “узел” – имеющие объём равный 0.

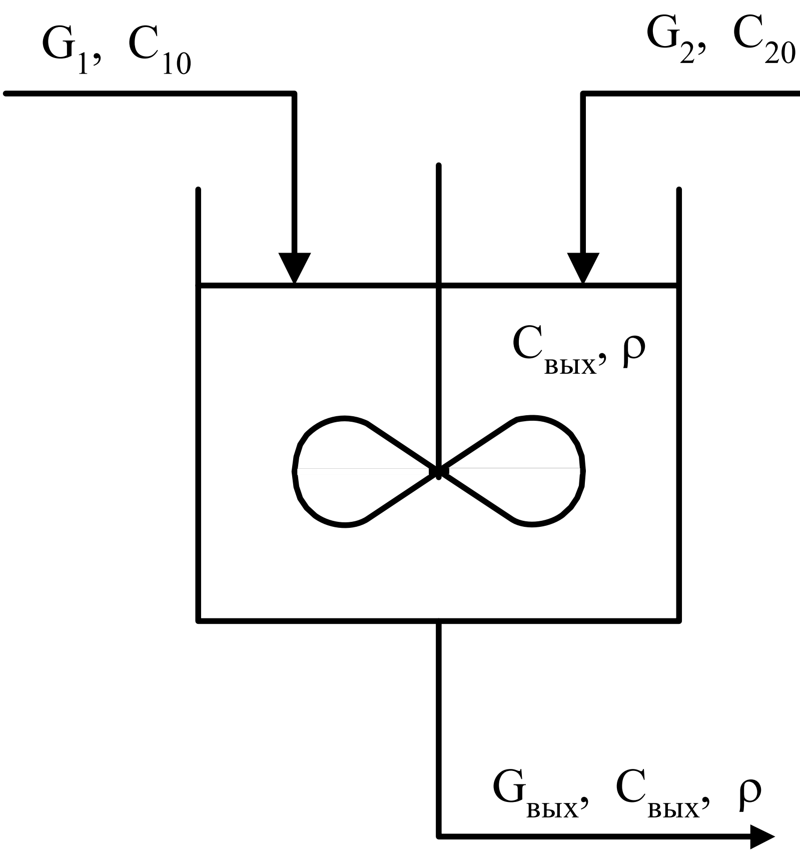
2 стадия: Формулируются допущения для каждой зоны, например: “термодинамические параметры постоянны”, “объём жидкости в ректоре постоянен”, $\rho = const$ и т.д.

3 стадия. Вводятся обозначения и указываются их размерности.

4 стадия. Для каждой зоны записываются уравнения материального баланса (МБ) (в общем случае число уравнений МБ равно или меньше числа присутствующих веществ), энергетического (теплового) баланса (ТБ) (одно для каждой зоны), и могут быть другие балансовые уравнения (по импульсу, электрическому заряду и др.), но в этом курсе они не рассматриваются.

Балансовые уравнения представляют собой дифференциальные уравнения, в правой части которых – производная по времени. Для из решения необходимо знать начальные условия (НУ) – значение переменной, по которой пишется баланс (если МБ, то количество вещества в зоне, если ТБ, то температура среды и т.д.) в начальный момент времени. Если балансовое уравнение пишется для стационарного режима, то производная по времени равна 0 и НУ не требуются.

Пример.



Выделяем одну зону.
Допущения в данном случае:

- ИС
- T=const, ρ=const -теплофизические параметры постоянны
- V=const

!!!Примечание!!! запись T=const означает, что температура T не меняется со временем, что она принимается постоянной. V=const означает, что объём V не меняется со временем. T разумеется НЕ РАВНА V.

[G] = кг/с, [C]=кг компонента/кг смеси. (например 0,01 кг NaCl на кг раствора)
Общая масса содержимого реактора – M кг, объём – V [м^3], плотность - $\rho\left[{кг}/{м^3}\right]$.

Материальный баланс для растворённого вещества:

$$[G_1C_{10}+G_2C_{20}]-[G_{вых}C_{вых}]=\frac{d}{dt}[MC_{вых}]=\frac{d}{dt}[V\rho C_{вых}]=V\rho\frac{dC_{вых}}{dt}$$

Начальные условия (Н.У.):

$$C_{вых}\big|_{t=0}=C_{вых}(0)=C_{вых}^{н}$$

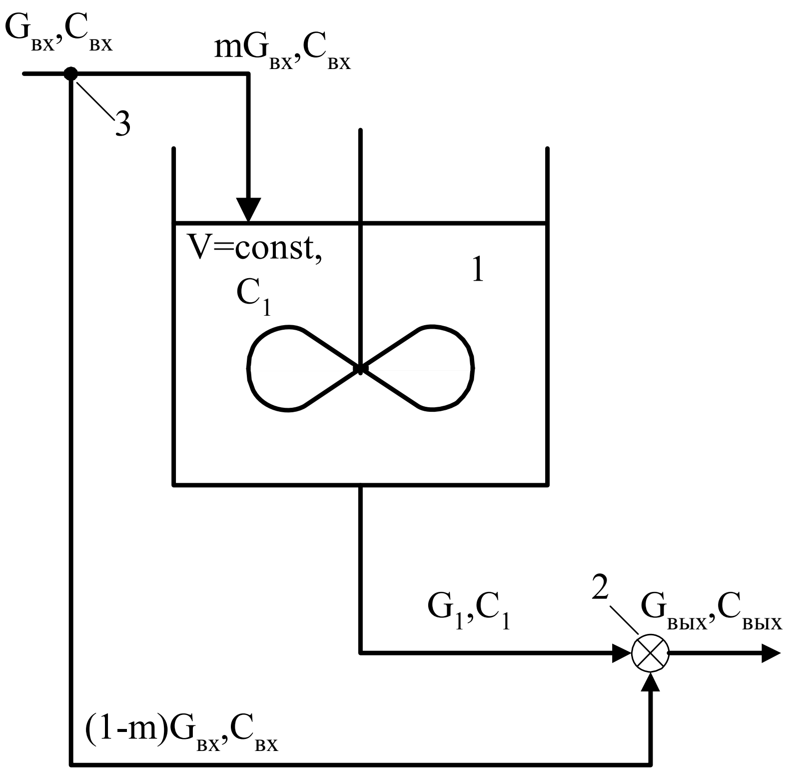
МБ для раствора в целом

$$[G_1+G_2]-[G_{вых}]=\frac{d}{dt}[M]=\frac{d}{dt}[V\rho]=0 \quad (\text{т.к. } V=\mathrm{const} \text{ и } \rho=\mathrm{const}, \text{то } V\rho=\mathrm{const} \text{ и } \frac{d}{dt}[V\rho]=0)$$

Следовательно,

$G_1+G_2=G_{вых}$

Второй пример (байпас):



$0 \le m \le 1$

МБ по веществу в целом для первой зоны не требуется.

МБ по растворённому веществу для первой зоны:

$$\left[G_1(t)C_{вх}(t)\right]-\left[G_1(t)C_1(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[V\rho C_1(t)\right]$$

$$C_{вх}(t)-C_1(t)=V\rho\frac{dC_1(t)}{dt}$$

НУ: $C_1(0)=0$

МБ по веществу в целом для второй зоны:

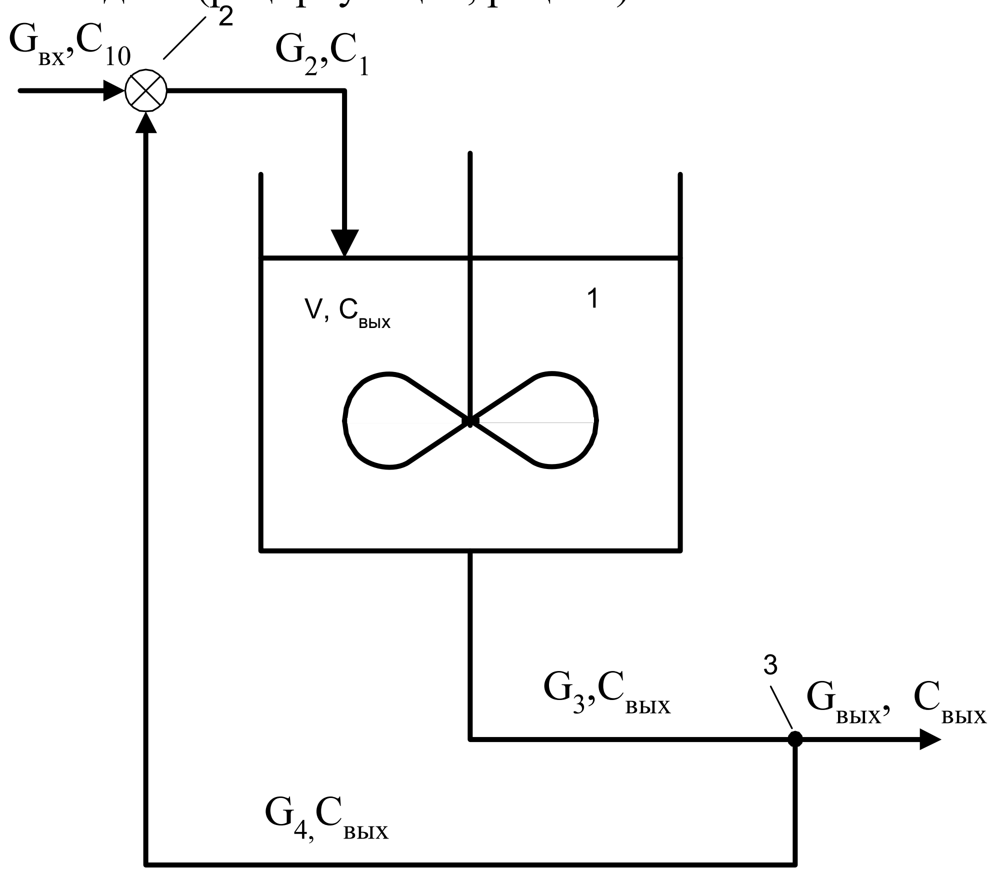
$$\left[G_1(t)+(1-m)G_{вх}(t)\right]-\left[G_{вых}(t)\right]=0$$

МБ по растворённому веществу для второй зоны:

$$\left[G_1(t)C_1(t)+(1-m)G_{вх}(t)C_{вх}(t)\right]-\left[G_{вых}(t)C_{вых}(t)\right]=0$$

Для третьей зоны балансовых уравнений не требуется.

Третья модель (рециркуляция, рецикл)



Допущения для 1 зоны:
ИС, V=const, ρ=const

МБ по веществу в целом для первой зоны:

$$\left[G_2(t)\right]-\left[G_3(t)\right]=\frac{d}{dt}[V\rho]=0$$

МБ по растворённому веществу для первой зоны:

$$\left[G_2(t)C_1(t)\right]-\left[G_3(t)C_{вых}(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[V\rho C_{вых}(t)\right]$$

$$\left[G_2(t)C_1(t)\right]-\left[G_3(t)C_{вых}(t)\right]=V\rho\frac{dC_{вых}(t)}{dt}$$

т.к. $G_2(t)=G_3(t)$, то $C_1(t)-C_{вых}(t)=\frac{V\rho}{G_2(t)}\frac{dC_{вых}(t)}{dt}$

НУ: $C_{вых}(0)=0$

МБ по веществу в целом для второй зоны:

$$\left[G_{вх}(t)+G_4(t)\right]-\left[G_2(t)\right]=0$$

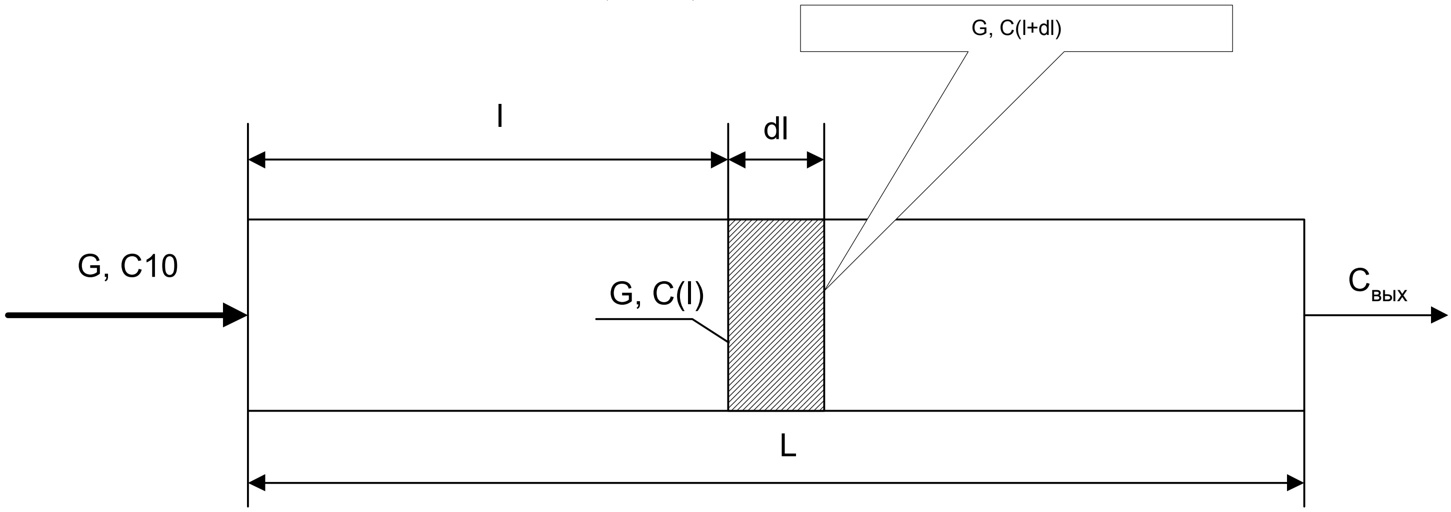
МБ по растворённому веществу для второй зоны:

$$\left[G_{вх}(t)C_{вх}(t)+G_4(t)C_{вых}(t)\right]-\left[G_2(t)C_1(t)\right]=0$$

МБ по веществу в целом для третьей зоны:

$$\left[G_3(t)\right]-\left[G_4(t)+G_{вых}(t)\right]=0$$

Режим Идеального Вытеснения (РИВ)



Допущения:
1) ИВ
2) T=const
3) Диаметр D=const
4) ρ=const

[G] = кг/с,   [C]=$\frac{кг_{компонента}}{кг_{смеси}}$, [l]=[м], объём – V [м^3], плотность - $\rho\left[{кг}/{м^3}\right]$.

МБ для элементарного объёма на расстоянии l от начала реактора по растворённому веществу:

$$\left[GC(l,t)\right]-\left[GC(l+dl,t)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[dV\rho C(l,t)\right]$$

т.к. dV не зависит от t, то

$$\left[GC(l,t)\right]-\left[GC(l+dl,t)\right]=dV\rho\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}$$

$$dV=\frac{\pi D^2}{4}dl$$

$$C(l+dl,t)\approx C(l,t)+\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}dl$$

$$\left[GC(l,t)\right]-\left[C(l,t)+\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}dl\right]=\frac{\pi D^2}{4}dl\rho\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}$$

$$GC(l,t)-GC(l,t)-G\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}dl=\frac{\pi D^2}{4}dl\rho\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}$$

$$-G\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}dl=\frac{\pi D^2}{4}dl\rho\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}$$

$$-G\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}=\frac{\pi D^2}{4}\rho\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{G}{\frac{\pi D^2}{4}\rho}\frac{\partial C(l,t)}{\partial l}=\frac{\partial C(l,t)}{\partial t}$$

$u = \frac{G}{\frac{\pi D^2}{4}\rho}$ - линейная скорость потока по длине реактора [м/с]

$$-u\frac{\partial C(l,t)}{\partial l} = \frac{\partial C(l,t)}{\partial t}$$

НУ: $C(l,0) = C(l,t)\big|_{t=0} = \tilde{C}(l)$

ГУ: C(0,t)=C_{10} (t)

Примечание. Поскольку мы не ввели допущения G=const, то имеется в виду что G(t) и u(t).

$$C_{вых}(t) = C(L,t) = C(l,t)\big|_{l=L}$$

Обратите внимание, что в окончательных уравнениях модели не должны фигурировать бесконечно малые величины dl, dV и т.п., а только производные $\frac{dT}{dt}$ и т.д.